Taller avançat de GeoGebra

Problema.1

Problema de trigonometria 1

Volem saber l'altura d'una torre. Observem la torre des d'un angle de 63º. Retrocedim 10m i l'angle d'elevació resulta ser de 35º. Quina és l'altura de la torre?

Problema de trigonometria 2

Des de la plaça del poble veig l'església que està a 60m. Giro el cap 20º cap a la dreta i veig un dipòsit d'aigua que està a 75m. Quina distància separa l'església del dipòsit?

Activitat 1

Aquesta activitat ha estat extreta del curs D55 *Matemàtiques amb GeoGebra* del Departament d'Educació de la Generalitat de Catalunya, els autors del qual són: Jaume Bartrolí, Pep Bujosa i Antoni Gomà

Generació punt a punt de la gràfica d'una funció

Per elaborar aquesta activitat podeu procedir així:

- Definiu la funció, per exemple *f(x)=(x^3)/8 - x*.
- Com que voldrem moure punts, per assegurar que la funció que estudiem romangui fixa i no es desplaci, cliqueu amb el botó dret sobre la definició de la funció a la finestra algebraica o sobre la gràfica de la funció a la finestra gràfica i aleshores trieu **Propietats** i activeu **Fixa objecte**.
- Definiu un punt sobre l'eix de les x, que serà el punt que mostra el valor de la variable independent que ens interessa en cada moment. Manteniu el nom A per al punt; després ja el canviareu.
- Definiu a la finestra de comandes un punt B amb l'expressió *B = (x(A), f(x(A)))*. Com ja sabeu, aquest és el punt que defineix la gràfica.
- Accediu a les propietats del punt B. A la pestanya **Color** doneu color blau a aquest punt. Activeu l'opció **Activa el traç**. A la pestanya **Estil** feu que la mida del punt sigui 2.

Moveu el punt A i vegeu que tot va per bon camí, tal com ho volíem. Tal vegada observeu que els punts queden més separats que a la finestra interactiva amb què heu practicat. Si ho voleu tenir com allà:

- Accediu a les propietats del punt A com ho feu habitualment. A la pestanya **Àlgebra** veureu que hi ha una casella on es pot establir **Increment**. Feu proves posant-hi 0.025 o 0.01.

Recordeu, també, que el punt A el podeu moure amb el ratolí o també seleccionant-lo i aleshores maure'l amb les fletxes de cursor.

Tot seguit dibuixareu els segments que ensenyen, per cada valor de la variable independent, quin és el valor de la variable dependent i enllestireu els darrers detalls per tenir l'activitat tal com s'ha presentat.

- Definiu a la línia d'entrada un punt *C=(0, f(x(A)))*
- Amb l'eina **Segment entre dos punts** definiu els segments AB i BC. Aneu a **Propietats** i trieu l'estil de recta adequat (línia de punts).
- Funció: feu que no es mostri l'objecte
- Punt A: canvieu-li el nom i que sigui *Valor*
- Punt C: canvieu-li el nom i que sigui *Imatge*
- Finalment amb l'eina **Insereix text** creeu un text que sigui *Punt de la gràfica*. Seguidament modifiqueu les propietats d'aquest text a la pestanya **Posició** perquè tingui com a **Punt origen** el punt B. Tant les etiquetes dels punts A i C com aquest text fixat al punt B es poden acabar de situar a mà.

Deseu la feina i experimenteu. Si voleu provar amb una altra funció, primer de tot haureu de desactivar a la finestra de propietats de la funció el **Fixa objecte** que heu establert per a la funció i aleshores podreu canviar-la.

Activitat 2

Aquesta activitat ha estat extreta del curs D55 *Matemàtiques amb GeoGebra* del Departament d'Educació de la Generalitat de Catalunya, els autors del qual són: Jaume Bartrolí, Pep Bujosa i Antoni Gomà

Màxims, mínims i punts d'inflexió

Presentem tot seguit una activitat amb funcions polinòmiques per a fer visuals els màxims i els mínims (extrems relatius) de la funció i de la derivada i els punts d'inflexió de la funció per relacionar-los amb els extrems de la derivada.

- Per fer la construcció, deixeu invisibles la graella i la finestra algebraica.
- Dibuixeu quatre punts lliscants, de la manera habitual, i feu que no agafin, inicialment, cap valor igual a 0. Feu que l'increment en cada un d'aquests punts lliscants sigui 1.
- Entreu l'expressió *f(x)* = *a**x^3 + *b**x^2 + *c**x + *d*, que correspon a la funció que estudiarem.
- Moveu els punts lliscants i comproveu les diferents formes que agafa la funció. Feu que els valors dels punts lliscants siguin: *1, 3, 0* i *-1* respectivament.
- Entreu el comandament **Extrem[f]** i quedaran dibuixats els màxims i els mínims de la funció.
- Entreu el comandament **f'(x)** i veureu la gràfica de la funció derivada, que s'anomenarà g(x). Doneu-li un color diferent del de la funció f(x).
- Entreu el comandament **Arrel[g]** i veureu com es dibuixen directament els punts de tall de la funció g(x) (que és f'(x)) amb l'eix d'abscisses.
- Si dibuixeu uns segments verticals que uneixin cada extrem de la funció f(x) amb les arrels de la funció f'(x) quedarà més visible la relació que hi ha entre ells.
- També es podria representar la segona derivada entrant, simplement, f ''(x). El que passa és que el gràfic potser quedaria poc clar i gens il·lustratiu. No ho feu.

Per això el que fareu serà relacionar els punts d'inflexió de la funció f(x) amb els extrems de la funció f'(x).

- Entreu el comandament **PuntInflexió[f]** i observeu que es representen tots els punts d'inflexió de la funció f(x).
- Entreu el comandament **Extrem[g]** i veureu els extrems de la derivada.

- Dibuixeu, com abans, els segments verticals que permeten relacionar aquests punts (extrems de la derivada i punts d'inflexió de la funció).

Per entrar els rètols de la funció i la derivada:

- Trieu l'eina **Insereix un text** i feu clic allà on voleu que es vegi.
- Entreu el text *"f(x) = "+f*. Acabeu amb **Aplica**.
- Repetiu el procediment per a la derivada, entrant el text *"f'(x) = " + g*.
- Acabeu els detalls estètics tal com us interessi…

Activitat 3

Aquesta activitat ha estat extreta del curs D55 *Matemàtiques amb GeoGebra* del Departament d'Educació de la Generalitat de Catalunya, els autors del qual són: Jaume Bartrolí, Pep Bujosa i Antoni Gomà

Funció definida a trossos

En moltes aplicacions científiques interessa considerar funcions que només estan definides en un interval. Això ho podem aconseguir mitjançant el comandament **Funció**, que té com a arguments la funció i els dos extrems de l'interval on volem que estigui definida.

- Podeu provar-ho amb *f(x) = Funció[4+sin(3x),0,π]*.

El nombre pi el podeu escriure així mateix (és a dir *pi*, que és una variable pròpia del sistema) o amb la lletra grega (π) cosa que es pot fer amb el mateix desplegable que hem comentat per als exponents o bé amb el desplegable de les lletres gregues; a diferència de les altres lletres gregues, la π no serveix per a definir variables en el GeoGebra.

- Estudieu què succeeix si demaneu *f(0)* o bé *f(2π)* per a la funció anterior.

En altres ocasions interessa considerar funcions definides a trossos. Això passa molt sovint als exàmens que es proposen als alumnes de batxillerat. Vegeu-ne un exemple:

Proves d'accés a la Universitat. Curs 2006-2007

Matemàtiques aplicades a les ciències socials

2. Considereu la funció definida a trossos següent:

$$f(x)=\begin{cases}-4x+a & \text{si} \quad x\le -2\\ x^2-5 & \text{si} \quad -2<x<1\\ bx+3 & \text{si} \quad 1\le x\end{cases}$$

a) Calculeu els valors de a i de b per tal que $f(x)$ sigui contínua per a tot x.
b) Feu un gràfic de la funció obtinguda en l'apartat anterior.

En el GeoGebra la definició a trossos d'una funció s'ha de fer mitjançant el comandament condicional **Si[ ]**.

La sintaxi és la següent: Si[condició, valor si es compleix la condició, valor si no es compleix la condició],

que és una forma abreujada de la comanda condicional If..else o bé Si..altrament dels llenguatges de programació i que es correpon, fil per randa, amb el condicional dels fulls de càlcul.

És important tenir present que dintre del valor si no es compleix la condició es pot emprar novament la comanda Si, cosa que caldrà aprofitar per definir una funció amb tres trossos o més, com la de l'exemple.

Constateu que, si s'utilitza la idea dels llenguatges de programació, la definició de la funció és la següent:

f(x) = Si x≤2 aleshores -4x+a

altrament (que ja inclou -2<x)

Si x<1 aleshores x^2−5

altrament b·x+3 (vegeu que s’aplicarà quan 1≤x)

fi

Així doncs, per a l’elaboració de l’activitat podeu procedir així:

- Feu **Fitxer | nou**
- Definiu un punt lliscant que pugui variar de −10 a 10. Aquest serà el valor del paràmetre *a*.
- Definiu un altre punt lliscant, *b*, amb els mateixos límits de variació. Situeu els dos punts lliscants a la zona que us interessi de la pantalla.
- Ara escriviu a la línia d’entrada la definició de la funció d’acord amb les idees exposades:

  *Si[x< = -2, −4x+a, Si[x<1, x^2−5, b*x+3]]*
- Vegeu que el signe de més petit o igual es pot escriure amb els símbols < i = juxtaposats; també teniu el símbol al desplegable de símbols de la finestra d’entrada de dades. Vegeu també que el producte de *b* per *x* s’ha escrit amb el signe corresponent; es podria escriure també *b x* amb un espai per representar el producte però no *bx* perquè en aquest cas el GeoGebra entendria *bx* com el nom d’una nova variable.
- Ja teniu la funció definida i dibuixada globalment, “tota de cop”. Comproveu per exemple els valors *f(0)*, *f(5)*, *f(-5)*. Observeu les variacions que es produeixen quan modifiqueu els valors dels dos paràmetres representats mitjançant els punts lliscants.

Per acabar la presentació de l’activitat tal com l’hem mostrat:

- Podeu modificar el gruix i el color de la funció.
- Podeu fer que es destaqui “on és” el punt de la funció en cada salt:
  - o Escriviu *A=(-2, f(-2))*
  - o Escriviu *B=(1, f(1))*
  - o Podeu fer que no es mostrin les etiquetes dels punts i donar-los la mida i el color que convingui.
- D’aquesta manera ja heu vist la possibilitat de definir funcions “a trossos” amb el GeoGebra. Sobre això convé comentar:

Si la funció només té “dos trossos”, la definició és més directa que l’exemple estudiat. Es farà amb un sol **SI[ ]**.

Tal com ho hem vist la funció queda definida correctament i, a més, esdevé un element analític: podem calcular-ne directament la derivada o la integral.

És interessant comentar una manera alternativa de mostrar una funció a trossos, aprofitant el comandament **Funció[ ]** que ja hem presentat anteriorment.

- Feu **Fitxer | Nou**
- Creeu com abans dos punts lliscants, a i b, amb valors de -10 a 10.
- Escriviu a la línia d’entrada *Funció[-4 x + a, -200, -2]*.
- Amb aquesta instrucció estem definint la funció -4 x + a des de -200 (que fa el paper del -∞, a efectes pràctics) fins a -2.

- Entreu a continuació les expressions que corresponen a les definicions dels altres trossos, a saber *Funció[x^2-5,-2,1]* i *Funció[b x + 3, 1, 200]*.
- Moveu els dos punts lliscants i observeu.

Aquest mètode, ben intuïtiu i eficaç per mostrar la gràfica de la funció, té l'inconvenient que no la converteix en una funció "global". Per visualitzar la derivada, per exemple, també hauríem d'escriure'n la definició interval a interval.

De la mateixa manera que hem fet servir els punts lliscants per assignar valors als paràmetres *a* i *b* que intervenien en la definició de la funció, també es pot definir una funció a trossos de manera que el(s) punt(s) de salt sigui(n) els valors d'un(s) punt(s) lliscant(s). Per si voleu experimentar (i preguntar dubtes, si escau) us proposem que busqueu amb el GeoGebra, mitjançant una funció definida a trossos amb l'ajut d'un punt lliscant, el valor de *a* que fa que la funció següent sigui contínua :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & si\, x \le a \\ x + 5 & si\, x > a \end{cases}$$

Activitat 4

Sumes

Anem a fer una construcció que ens mostri la suma d'un en un, de dos en dos, de tres en tres... I que ho faci automàticament.

- Inseriu un punt lliscant *a* que prengui valors entre 1 i 10. L'increment ha de ser d'1. Aquest punt lliscant determinarà de quant en quant fem la suma.
- Inseriu un altre punt lliscant *b* que prengui valors entre 1 i 10. L'increment ha de ser d'1. Aquest punt lliscant permetrà considerar les diferents sumes.
- Inseriu un text nou amb l'expressió següent:

  a (b - 1) + " + " + a + " = " + (a*b)*

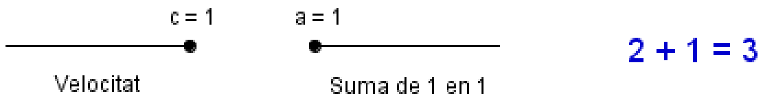
  Observeu que *a* i *b* fan referència als punts lliscants.
- Canvia el color i augmenta al màxim la grandària de la lletra.

Anem a provar si funciona. Fixeu el primer punt lliscant a 5. Moveu el segon punt lliscant i observeu com es visualitzen les sumes de 5 en 5. Canvieu el primer punt lliscant a 3. Moveu el segon punt lliscant i observeu com es visualitzen les sumes de 3 en 3.

Aquest procés es pot automatitzar.

- Inseriu un punt lliscant *c* que prengui valors entre 0.1 i 1. L'increment ha de ser de 0.1. Aquest punt lliscant determinarà la velocitat en què es reprodueixen les sumes.
- Poseu el punt lliscant a 1
- Accediu a les propietats del punt lliscant *b* i modifiqueu els paràmetres següents:
  - A la pestanya Punt lliscant, al paràmetre Velocitat poseu *c*, al paràmetre Repeteix poseu *Creixent*.
  - A la pestanya Bàsic, marqueu Animació activada i desactiveu Mostrar objecte.

- A sota dels punts lliscants *a* i *c* podeu posar un rètol tal i com es veu a la imatge següent



I ja està.

Si sou prou enginyosos podríeu muntar una activitat de càlcul mental en què primer es proposés la suma i al cap d'uns segons es mostrés el resultat.

Si us ha agradat l'activitat, Podeu intentar fer una de semblant amb multiplicacions.

Activitat 5

Gota d'aigua.

Fareu una construcció senzilla i visualment atractiva. Es tracta d'imitar les ones que es produeixen en caure una gota sobre un líquid.

Començareu amb una llista de 20 circumferències concèntriques centrades en el (0,0) i que comencen amb radi 0 fins radi 10 i que es va incrementant de 0,5 en 0,5.

- Obriu el GeoGebra i comproveu que l'idioma és el català
- Feu que es vegi la finestra algebraica
- A la línia d'entrada escriviu: Seqüència[Circumferència[(0, 0), j / 2], j, 0, 20]
- Creeu un punt lliscant que prengui valors de 0 a 20 amb un increment d'1, anomenat *a*.
- Modifiqueu la llista que heu creat de forma que quedi així:

  Seqüència[Circumferència[(0, 0), (j + a) / 2], j, 0, 2]
- Moveu el punt lliscant. I interpreteu les modificacions que hem fet.
- Aneu a **Edita | Propietats** i modifiqueu les propietats següents:
  - Punt lliscant:
    - **Velocitat**: 5
    - **Repeteix**: Creixent
    - **Animació activada**
  - Llista:
    - Color: blau fluix
- Modifiqueu el color del fons a blau fosc.

Activitat 6

Producte de nombres naturals.

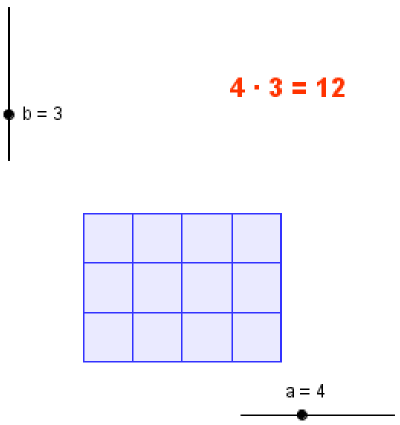
La construcció és ràpida de fer, però el comandament que s'ha d'introduir us pot resultar complicat. Us encoratgem a què intenteu comprendre'l, però si no us agrada trencar-vos el cap, limiteu-vos a copiar-lo.

Començareu creant dos punts lliscants.

- Obriu el GeoGebra i comproveu que l'idioma és el català
- Feu que es vegi la finestra algebraica i els eixos de coordenades.
- Creeu dos punts lliscants que prenguin valors de 0 a 10 amb increment 1. En el segon punt lliscant, a la pestanya **Punt lliscant** trieu **Vertical**.
- Poseu el punt lliscant *a* per sota de l'eix horitzontal. Poseu el punt lliscant *b* a l'esquerra de l'eix vertical.
- Inseriu a la finestra gràfica el text següent: a + " · " + b + " = " + (a*b)
- Modifiqueu la grandària del text (18), el color (vermell) i negreta.
- Moveu els punts lliscants i observeu el text dinàmic.
- A la línia de comandes escriu:

  Seqüència[Seqüència[Polígon[(i, j), (i + 1, j), (i + 1, j + 1), (i, j + 1)], i, 0, a - 1], j, 0, b - 1]
- Moveu els punts lliscants i observeu com es representa gràficament el producte dels dos nombres.
- Amagueu els eixos de coordenades

Com modificaríeu la construcció per tal que el producte fos de dos nombres parells més petits de 100?



Activitat 7

Núvol de punts. Correlació lineal.

L'activitat 6 de la Prova de matemàtiques per l'accés a Cicles formatius de grau superior de 2009 diu:

La taula següent mostra la renda per càpita (RPC) i l'índex de natalitat (IN) de dotze països:

Països	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*	*I*	*J*	*K*	*L*
RPC	*3*	*3*	*4*	*5*	*6*	*5*	*7*	*7*	*8*	*9*	*9*	*10*
IN	*8*	*7*	*7*	*6*	*6*	*5*	*6*	*4*	*5*	*4*	*3*	*3*

a) Representa els resultats mitjançant un núvol de punts i traceu-ne aproximadament una recta de regressió.

b) Digueu com és la correlació entre les dues variables (lineal o curvilínia, positiva o negativa, forta o dèbil)

Anem a resoldre aquesta activitat des del punt de vista de l'alumnat, suposant que el dia de la prova disposa GeoGebra.

- Obriu el GeoGebra i comproveu que l'idioma és el català.
- Al menú Visualitza activeu: Eixos, Finestra algebraica, Full de càlcul.
- A la columna A del full de càlcul introduïu les dades referents al RPC i a la columna B les dades referides a l'IN.
- Seleccioneu les cel·les A1:B12. Sobre el rectangle de selecció cliqueu amb el botó dret. Trieu l'opció. Crea Llista de Punts.

Ja heu aconseguit la primera part de l'apartat a: representar el núvol de punts. Tot seguit representareu la recta de regressió.

- Seleccioneu l'eina Recta de Regressió que es troba en el quart grup d'icones.
- Marqueu un rectangle sobre la finestra gràfica que contingui els dotze punts.

Ja heu fet la segona part de l'apartat a: traçar la recta de regressió. L'apartat b el podeu respondre observant la finestra gràfica.

És evident que la pregunta és fàcil i ràpida de realitzar, i més si ho feu amb GeoGebra. Penseu en dues preguntes, relatives a aquest enunciat, que podrien sortir en una prova en la qual l'alumne disposés de GeoGebra. Publiqueu-les en el fòrum i intenteu respondre les preguntes que han proposat els vostres companys.

Adreces interessants

Associació Catalana de GeoGebra: www.acgeogebra.cat

APMCM: www.apmcm.cat

IGC: www.geogebra.es

Grup 4D: www.geometriadinamica.es

Daniel Mentrard dmentrard.free.fr/GEOGEBRA/index.htm

Curs D55 actualitzat: http://gregal.xtec.net/formaciotic/dvdformacio/materials/td55/index.html